**Уравнения и неравенства с модулем.**

**Необходимо: владеть понятием модуля, знать геометрический смысл модуля, уметь решать простейшие алгебраические уравнения.**

Определение: |a|=a, если a>0; |a|=-a, если a<0; |a|=0,если a=0.

При решении уравнения (неравенства) с модулем, как правило, следует разбить ОДЗ уравнения на множества, на котором выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение (неравенство) можно записать без знака модуля и решить на этом множестве.

**Пример 1.** Решить уравнение. x2-5|x|+6=0.

Решение. Числовая прямая точкой x=0 разбивается на 2 интервала:

x \_0 +

Следовательно, при x<0 исходное уравнение равносильно следующему:

x2+5x+6=0, а при  равносильно уравнению x2-5x+6=0.

Решениями первого уравнения являются числа -2 и -3. Оба они удовлетворяют условию x<0, следовательно, являются решениями исходного.

Решения второго уравнения - числа 2 и 3. Они удовлетворяют условию , значит, эти числа так же входят во множество решений исходного уравнения.

Ответ: -3; -2; 2; 3.

**Пример 2.** Решить уравнение |x|+|5-x|+2|x-3|=7.

Решение. Методом интервалов находим промежутки знакопостоянства выражений x, 5-x, x-2: x<0; 0<x<3 3x<5; x>5.

5

3

0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  - |  + |  + |  + |
| 5-x |  + |  + |  + |  - |
| x-3 |  - |  - |  + |  + |

Следовательно, при x<0 уравнение равносильно следующему: -x+5-x-2(x-3)=7. Решая данное уравнение, получаем: x=4.5. Это число не входит во множество x<0 и, следовательно, не является решением исходного уравнения.

На множестве  исходное уравнение равносильно: x+5-x-2(x-3)=7. Решением этого уравнения является число x=9. Это значение не принадлежит множеству  и не является решением.

При  получаем уравнение x+5-x+2(x-3)=7. Решение этого уравнения x=4 удовлетворяет условию  и, следовательно, является решением исходного уравнения.

И, наконец, при x>5 получаем уравнение x+x-5+2(x-3)=7. Решение этого уравнения x=4.5 не удовлетворяет условию x>5 и, значит, не является решением исходного.

Ответ: x=4.

**Пример 3**. Решить неравенство |x2-2x|<x.

Решение. Найдем промежутки знакопостоянства выражения x2-2x. x2-2x<0 при 0<x<2;  при . При 0<x<2 неравенство принимает вид 2x-x2<x, т.е. x2>x или x(x-1)>0. Решением этого неравенства является множество . Учитывая условие 0<x<2, получаем решение исходного неравенства (1;2). При  неравенство принимает вид x2-2x<x или x2-3x<0. Решением данного неравенства является промежуток (0;3). Учитывая , получаем решение исходного неравенства: [2;3). И наконец, ответ: .

Однако, такой подход к решению уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины, не всегда приводит к ответу. Под знаком модуля могут оказаться выражения, для которых бывает довольно затруднительно найти промежутки знакопостоянства.

В этом случае бывает удобно воспользоваться следующими свойствами модуля.

1. *Уравнение |f(x)|=g(x) равносильно совокупности уравнений: f (x)=g(x) ил и f(x)=-g(x). Решая оба эти уравнения и беря объединение решений, получим решение исходного уравнения.*
2. *Неравенство |f(x)|>g(x) равносильно совокупности неравенств: f (x)>g(x) или f(x)<-g(x). Решая оба эти неравенства и беря объединение решений, получим решение исходного неравенства.*
3. *Неравенство |f(x)|<g(x) равносильно системе неравенств: f (x)<g(x) и f(x)>-g(x). Решая оба эти неравенства и беря пересечение решений, получим решение исходного неравенства.*

Вышеперечисленные свойства помогают решить уравнение (неравенство) в том случае, если удается уединить единственный модуль в одной части уравнения (неравенства).

**Пример 4.** Решить уравнение |x2+5x|=6

Решение. Воспользуемся свойством 1 модуля: исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: x2+5x=6 или x2+5x=-6, следовательно, получили квадратные уравнения: x2+5x-6=0 или x2+5x+6=0. Решая эти уравнения, получаем ответ: {-6;-3; -2; 1}.

**Пример 5.** Решить неравенство | |x3-x-1|-5|>x3+x+8.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

1. |x3-x-1|-5>x3+x+8 или 2. |x3-x-1|-5<-x3-x-8

Решим №1.

Уединив модуль в левой части, получаем неравенство: |x3-x-1|>x3+x+13.

Получили неравенство, которое равносильно совокупности неравенств:

x3-x-1>x3+x+13 или x3-x-1<-x3-x-13

-x>14 или 2x3<-12

x<-7 или x<

Т.е. 

 Решим №2. x3+x+8<x3-x-1-5<-x3-x-8

 x3+x+13<x3-x-1<-x3-x-3
 2x<-14 и 2x3<-2 x<-7 x<-1

 Берем пересечение множеств:  .

И, наконец, объединяя решения, полученные в №1 и №2, получаем решение исходного неравенства: .